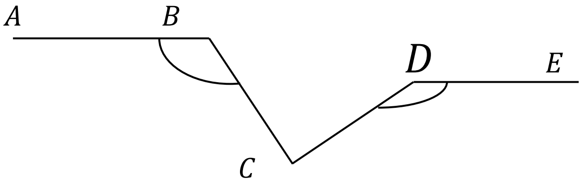
Inspection d'Académie de Tambacounda
Cellule Régionale de Mathématiques

Année scolaire 2023/2024
Niveau : 1re S2

SERIE D'EXERCICES : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1 :

Soit $ABCDE$ la ligne brisée représentée ci-dessous, où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.



Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right)$.

EXERCICE 2 :

On donne un triangle ABC de sens direct. Démontrer que :

$$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) + Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \pi.$$

EXERCICE 3 :

Soit ABC un triangle non rectangle et H son orthocentre. Et H_A le symétrique orthogonal de H par rapport à (BC).

1. Démontrer que $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ (\pi)$
2. Démontrer que $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{H_AB}, \overrightarrow{H_AC})\ (2\pi)$
3. En déduire $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{H_AB}, \overrightarrow{H_AC})\ (\pi)$
4. Montrer que les quatre points A, B, C et H_A sont cocycliques.
5. Nommer deux autres points sur ce cercle.

EXERCICE 4 :

Soit A et B deux points distincts du plan orienté.
Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que :

1. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$
2. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$
3. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$

EXERCICE 5 :

A) Simplifier les expressions suivantes

$$A(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(2\pi - x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$$

$$B(x) = 3\cos(-x) + 5\cos(\pi - x) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$$

B)

1) Trouver une relation simple entre $\cos\frac{\pi}{7}\ et\ \cos\frac{6\pi}{7}$ puis entre $\cos\frac{2\pi}{7}\ et\ \cos\frac{5\pi}{7}$

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = 0$

3) Représenter sur le cercle trigonométrique les points images de x,

$a)\ \cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad b)\ \sin x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad c)\ -\dfrac{1}{2} \leq \sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 6 :

1. Démontrer que pour tout élément x de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$. On a : $\sqrt{1+\sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$
2. Démontrer que $16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$
3. Mettre l'expression $\dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$ sous la forme d'un produit de deux tangentes
4. Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{1+2\cos x+\cos 2x}$

EXERCICE 7:

A l'aide des formules d'addition, exprimer le produit cosa.cosb en fonction de cos (a+ b) et cos (a – b).

2. 2) En posant a +b = p et a – b =q, démontrer que cosp + cosq = 2 $\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.
3. 3) Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ puis $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.
4. 4) Résoudre cosx + cos2x + cos3x = 0 dans l'intervalle$[0, 2\pi]$. Représenter les solutions sur le cercle trigo.

EXERCICE 8 :

Résoudre dans I les équations suivantes

1. $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ I = IR
2. $\cos(-x + \frac{\pi}{3}) + \cos 3x = 0$ I = IR
3. $\sin 2x = \cos^2 x$ I = IR
4. $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ I = IR
5. $\sin 2x - 2\sin x\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$ I = IR
6. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(2x + \frac{\pi}{8}) = 0$ I = IR
7. $3\tan^2 x - 1 = 0$ I = $[-\pi\ ;\pi[$

EXERCICE 9 :

Résoudre dans I les inéquations suivantes et représenter leurs images sur le cercle trigonométrique.

1. $\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{2}) - 1 \leq 0$ I = $[0; 2\pi[$
2. $\sin x - \cos x \leq 0$ I = IR
3. $\dfrac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} \geq 0$ I = $[-\pi\ ;\pi[$
4. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$ I = $[0; 2\pi[$
5. $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$
6. $\tan(x - \frac{\pi}{6}) \geq 0$

EXERCICE 10 :

Soit ABCDE un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique ; en utilisant la relation $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$; montrer que :

1. $1 + 2(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}) = 0$
2. $1 + 4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = 0$
3. En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$

EXERCICE 11 :

1. a) Sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$; donne les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

   b) Déduis en le calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
2. Retrouve autrement les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
3. Résoudre dans IR l'équation (E) : $\cos 4x + \sin 4x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$; précise les solutions de (E) qui appartiennent dans $[0 ; 2\pi[$
4. Place les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
5. a) calcule $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3$ de deux façons.

   b) détermine l'expression de $\sin^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.

   c) déduis-en que $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

EXERCICE 12 :

On considère dans l'intervalle $I = [-\pi ; \pi[$ l'équation (E) : $\cos 4x - \cos 3x = 0$.

1. Résoudre (E) dans I et puis représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. On pose $\cos x = X$.
   a) Exprimer $\cos 3x$ et $\cos 4x$ en fonction de X
   b) En déduire (E) est équivalente à (E') : $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$
   c) Montrer que les solutions de (E') sont 1, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$. En déduire une factorisation de $P(X) = 8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$.
   d) Calculer P(0), puis en déduire la valeur exacte de $A = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

Bon courage !!